

PROJEKTIVE MODULN ÜBER
QUATERNIONEN- UND DIEDERGRUPPEN

In-ho Cho

1975

PROJEKTIVE MODULN ÜBER
QUATERNIONEN- UND DIEDERGRUPPEN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Mathematik der
Ludwig-Maximilians-Universität in München

Vorgelegt von

In-ho Cho

München, 4. November 1974



1. Berichterstatter: Priv.Doiz. Dr. H.-J. Schneider
 2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Kasch
- Tag der mündlichen Prüfung: 29.1.1975

Inhaltsverzeichnis

Einleitung.....	1
§1. Satz von Milnor	5
§2. Rang	16
§3. Quaternionengruppen, Diedergruppen.....	20
§4. Die Einheiten in $\mathbb{Z}[D_{2^n}]$ ($n=1,2,3$)	27
§5. Projektive $\mathbb{Z}[D_{2^n}]$ -Moduln vom Rang 1 ($n=1,2,3$) ...	33
§6. Die Einheiten in Λ	37
§7. Projektive Λ -Moduln vom Rang 1	45
§8. Projektive $\mathbb{Z}[Q_{16}]$ -Moduln vom Rang 1	49
Literaturverzeichnis	55



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551923_0097

Einleitung

Π sei eine endliche Gruppe. Dann ist nach Swan jeder endlich erzeugte projektive $\mathbb{Z}[\Pi]$ - Modul ungleich 0 isomorph zu $\mathbb{Z}[\Pi]^n \oplus I$ für ein $n \geq 0$, wobei I ein projektiver Modul vom Rang 1 ist, d.h. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} I \cong \mathbb{Q}[\Pi]$. Dann ist I isomorph zu einem Ideal von $\mathbb{Z}[\Pi]$ [11].

Nach dem klassischen Satz von Jordan-Zassenhaus gibt es nur endlich viele Isomorphieklassen von $\mathbb{Z}[\Pi]$ - Moduln vom Rang 1 [13].

Wenn Q_{32} die verallgemeinerte Quaternionengruppe der Ordnung 32 ist, so ist nach Swan nicht jeder projektive $\mathbb{Z}[Q_{32}]$ - Modul vom Rang 1 frei [12].

Falls Q_8 die Quaternionengruppe der Ordnung 8 ist, gibt es nach Martinet genau zwei Isomorphieklassen von projektiven $\mathbb{Z}[Q_8]$ - Moduln vom Rang 1 [5].

Das Ziel dieser Arbeit ist es, für die verallgemeinerte Quaternionengruppe Q_{16} der Ordnung 16 die Isomorphieklassen von projektiven $\mathbb{Z}[\Pi]$ - Moduln vom Rang 1 zu bestimmen. Es wird gezeigt, dass es genau zwei Isomorphieklassen von projektiven $\mathbb{Z}[Q_{16}]$ - Moduln vom Rang 1 gibt, und diese werden explizit angegeben (§8).

Der Satz von Milnor [6] über die Konstruktion von projektiven Moduln über einem Faserprodukt von Ringen ist das wesentliche Hilfsmittel dieser Arbeit.

Sei Π eine endliche Gruppe. Wenn es ein zentrales Element z in Π der Ordnung 2 gibt, so ist folgendes Quadrat von kanonischen Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\Pi] & \rightarrow & \mathbb{Z}[\Pi/(z)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[\Pi]/(e+z) & \rightarrow & \mathbb{F}_2[\Pi/(z)] \end{array}$$

ein Faserprodukt diagramm.

Zur Bestimmung der projektiven $\mathbb{Z}[\Pi]$ - Moduln müssen also die projektiven Moduln über $\mathbb{Z}[\Pi/(z)]$ und $\mathbb{Z}[\Pi]/(e+z)$ bestimmt werden. Ausserdem ist es nötig, die Einheitenabbildungen des Faserprodukt diagramms zu kennen. Sind Q_{4t} bzw. D_{4t} , D_{2t} die Quaternionen- bzw. Diedergruppen der Ordnung $4t$ bzw. $4t, 2t$, so ergeben sich als Spezialfälle die Faserprodukt diagramme (3.9)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[Q_{4t}] \rightarrow \mathbb{Z}[D_{2t}] & & \mathbb{Z}[D_{4t}] \rightarrow \mathbb{Z}[D_{2t}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda_{2t} \rightarrow \mathbb{F}_2[D_{2t}] & & \Gamma_{2t} \rightarrow \mathbb{F}_2[D_{2t}], \end{array}$$

wobei Λ_{2t} bzw. Γ_{2t} jeweils $\mathbb{Z}[\Pi]/(e+z)$ für passendes z ist.

Die Bestimmung der projektiven Moduln und der Einheiten von $\mathbb{Z}[Q_{4t}]$, $\mathbb{Z}[D_{4t}]$ kann also nacheinander auf den Fall von Algebren kleinerer Dimension, insbesondere kleinerer Diedergruppen reduziert werden. Mit dieser Methode werden die projektiven Moduln vom Rang 1 und die Einheiten von $\mathbb{Z}[D_2]$, $\mathbb{Z}[D_4]$, $\mathbb{Z}[D_8]$ explizit

berechnet (§4,5). Projektive Moduln vom Rang 1 über $\mathbb{Z}[D_2]$, $\mathbb{Z}[D_4]$, $\mathbb{Z}[D_8]$ sind frei. Dieses Resultat hat Martinet in [5] erwähnt, den Beweis aber nur kurz skizziert. In dieser Arbeit wird ein neuer Beweis angegeben. Für die Einheitengruppen von $\mathbb{Z}[D_2]$, $\mathbb{Z}[D_4]$ gilt $U(\mathbb{Z}[D]) = \{\pm d \mid d \in D\}$, $D = D_2$ oder $D = D_4$. Dieses Resultat ist nach Higman [2] bekannt, es wird hier auf andere Weise mit der erwähnten Methode bewiesen. Ausserdem wird $U(\mathbb{Z}[D_8])$ berechnet (4.6), und das Bild von $U(\mathbb{Z}[D_8]) \rightarrow U(\mathbb{F}_2[D_8])$ explizit angegeben.

Zur Berechnung der projektiven Moduln über $\mathbb{Z}[Q_{16}]$ wird gezeigt, dass projektive Moduln vom Rang 1 über $\Lambda := \Lambda_8$ frei sind. Dazu wird gezeigt, dass Λ $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ -Ordnung der Quaternionenalgebra $Q[\sqrt{2}][i, j]$ ist. Dann wird Λ in eine Maximalordnung Σ eingebettet. Nach Krimse [3] ist Σ Hauptidealring. Daraus folgt die Behauptung über Λ wieder mit Hilfe eines Faserprodukt-diagramms:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \rightarrow & \Sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda/\sqrt{2}\Sigma & \rightarrow & \Sigma/\sqrt{2}\Sigma, \end{array}$$

denn $\sqrt{2}\Sigma$ ist ein zweiseitiges Ideal in Σ , das in Λ enthalten ist.

Schliesslich werden in §6 die Einheiten von Λ bestimmt, und das Bild von $U(\Lambda) \rightarrow U(\mathbb{F}_2[D_8])$ wird explizit angegeben (§8). Durch Betrachtung des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[Q_{16}] & \rightarrow & \mathbb{Z}[D_8] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda & \rightarrow & \mathbb{F}_2[D_8] \end{array}$$

und der Kenntnisse über projektive Moduln über Λ , $\mathbb{Z}[D_8]$ und über die Einheiten von Λ , $\mathbb{Z}[D_8]$ lassen sich jetzt die projektiven $\mathbb{Z}[Q_{16}]$ -Moduln bestimmen (§8).

Herrn Dr. H.-J. Schneider möchte ich herzlichen Dank sagen für die Themenstellung und für viele anregende Diskussionen.

§1. Satz von Milnor

1.1 Bezeichnungen :

Alle in dieser Arbeit betrachteten Ringe seien assoziative Ringe mit Einselement, und alle Ringhomomorphismen sowie alle Moduln seien unitär. Wenn nicht anders angegeben seien Moduln stets Linksmoduln.

Für einen Ring R bedeutet $\mathcal{P}(R)$ die Kategorie der endlich erzeugten projektiven R -Moduln.

$f: R \rightarrow R_1$ sei ein Ringhomomorphismus. M sei R -Modul. $f_* M$ bezeichnet dann den von f induzierten R_1 -Modul $R_1 \otimes_R M$ und $f_*: M \rightarrow f_* M$ bezeichnet die kanonische Abbildung mit $f_*(m) = 1 \otimes m$ für $m \in M$. Sei $f_\# : \mathcal{P}(R) \rightarrow \mathcal{P}(R_1)$ der von f induzierte Funktor.

1.2 Definitionen :

(a) Gegeben sei ein Paar von Abbildungen (bzw. Ringhomomorphismen):

$$\begin{array}{ccccc} & f_1 & & f_2 & \\ A & \rightarrow & C & \leftarrow & B \end{array} .$$

Die Untermenge (bzw. der Unterring) von $A \times B$, $A \times_C B$, bezeichnet die Untermenge (bzw. den Unterring) von $A \times B$

$$\{(a,b) \in A \times B \mid f_1(a) = f_2(b)\} .$$

Ein kommutatives Quadrat von Abbildungen (bzw. Ringhomomorphismen)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g_2} & B \\ g_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ A & \xrightarrow{f_1} & C \end{array}$$

heisst Faserprodukt diagramm von f_1 und f_2 , wenn die Abbildung

$$X \rightarrow A \times_C B : x \mapsto (g_1(x), g_2(x))$$

bijektiv (bzw. isomorph) ist. Ferner heisst die Menge (bzw. der Ring) X ein Faserprodukt von A und B über C .

(b) Gegeben sei ein Paar von Funktoren

$$\mathcal{U}_1 \xrightarrow{F_1} \mathcal{U}' \xleftarrow{F_2} \mathcal{U}_2 .$$

Wir definieren dann die Faserproduktkategorie von $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ über $\mathcal{U}'$

$$\mathcal{U}_1 \times_{\mathcal{U}'} \mathcal{U}_2$$

auf folgende Weise:

Die Objekte sind Tripel (A_1, α, A_2) , wobei $A_i \in \mathcal{U}_i$ ($i=1,2$), $\alpha : F_1 A_1 \rightarrow F_2 A_2$ ein Isomorphismus in $\mathcal{U}'$ sind.

Ein Morphismus $(A_1, \alpha, A_2) \rightarrow (B_1, \beta, B_2)$ in $\mathcal{U}_1 \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_2$ ist ein Paar von Morphismen

$$f_i : A_i \rightarrow B_i \text{ in } \mathcal{U}_i \quad (i=1,2),$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_1 A_1 & \xrightarrow{\alpha} & F_2 A_2 \\ F_1 f_1 \downarrow & & \downarrow F_2 f_2 \\ F_1 B_1 & \xrightarrow{\beta} & F_2 B_2 \end{array}$$

kommutativ ist ([2] VII, §3).

Sei

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{h_2} & R_2 \\ h_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ R_1 & \xrightarrow{f_1} & R' \end{array}$$

ein Faserprodukt diagramm von Ringen, wobei f_1 oder f_2 surjektiv ist.

In §1 halten wir von jetzt ab das Faserprodukt diagramm fest, ferner folgende Bezeichnungen:

$$H_i = h_{i*} : P(R) \rightarrow P(R_i) \quad (i=1,2)$$

$$F_i = f_{i*} : P(R_i) \rightarrow P(R) \quad (i=1,2) .$$

$$M(P_1, \xi, P_2) := P_1 \times_{R' \otimes_{R_2} P_2} P_2$$

$$= \{(x_1, x_2) \in P_1 \times P_2 \mid \xi f_{1*}(x_1) = f_{2*}(x_2)\},$$

wobei P_i ein projektiver R_i -Modul ($i=1,2$),

$\xi : R' \otimes_{R_1} P_1 \rightarrow R' \otimes_{R_2} P_2$ ein R' -Isomorphismus ist.

$M(P_1, \xi, P_2)$ ist dann ein R -Untermodul von $P_1 \times P_2$ mit der von h_1, h_2 induzierten R -Struktur.

1.3 Bemerkung :

Ein Satz von Milnor ([6] Theorems 2.1, 2.2, 2.3) über die Konstruktion von projektiven Moduln ist so wichtig in dieser Arbeit, dass alle Sätze über projektive Moduln in dieser Arbeit eigentlich Folgerungen dieses Satzes sind. Diesen Satz von Milnor formulieren wir mit den Bezeichnungen dieser Arbeit.

Satz 1.5 hat Bass ([1] IX. §5 (5.1) Theorem) schon bewiesen.

Aus Satz 1.4 beweisen wir aber diesen Satz direkt.

1.4 Satz (Milnor) :

(a) $M(P_1, \xi, P_2) \in P(R)$

(b) Für $P \in P(R)$ ist $P \cong M(R_1 \otimes_R P, \varphi_P, R_2 \otimes_R P)$, wobei

$$\varphi_P : R'_1 \otimes_{R_1} (R_1 \otimes_R P) \xrightarrow{\cong} R'_1 \otimes_{R_2} (R_2 \otimes_R P)$$

der kanonische R' -Isomorphismus ist.

(c) Die Moduln P_1 und P_2 sind kanonisch isomorph zu $f_{1*} M$ bzw. $f_{2*} M$, $M = M(P_1, \xi, P_2)$:

$$R_1 \otimes_R M(P_1, \xi, P_2) \xrightarrow{\cong} P_1 \quad \text{mit} \quad 1 \otimes (x_1, x_2) \mapsto x_1 \quad (i=1, 2).$$

Beweis : [6] Theorem 2.1, 2.2, 2.3 .

1.5. Satz (Milnor) : ([1] IX, §5, 5.1 Theorem)

$$M : P(R_1) \times_{P(R')} P(R_2) \rightarrow P(R) \quad \text{mit}$$

$$M((P_1, \xi, P_2)) := M(P_1, \xi, P_2) \quad \text{für} \quad (P_1, \xi, P_2) \in P(R_1) \times_{P(R')} P(R_2),$$

$$M((t_1, t_2)) : M(P_1, \xi, P_2) \rightarrow M(P'_1, \xi', P'_2) : (x_1, x_2) \mapsto (t_1(x_1), t_2(x_2))$$

$$\text{für einen Morphismus } (t_1, t_2) : (P_1, \xi, P_2) \rightarrow (P'_1, \xi', P'_2)$$

in $P(R_1) \times_{P(R')} P(R_2)$ ist Äquivalenz, d.h.

$$M : P(R_1) \times_{P(R')} P(R_2) \rightarrow P(R)$$

ist ein volltreuer Funktor und $\forall P \in P(R) \exists (P_1, \xi, P_2) \in P(R_1) \times_{P(R')} P(R_2)$ mit $M((P_1, \xi, P_2)) \cong P$.

Beweis : Sei $(P_1, \xi, P_2) \in P(R_1) \times_{P(R')} P(R_2)$. Dann ist

$M((P_1, \xi, P_2)) := M(P_1, \xi, P_2) \in P(R)$ nach 1.4(a). Sei

$(t_1, t_2) : (P_1, \xi, P_2) \rightarrow (P'_1, \xi', P'_2)$ ein Morphismus in $P(R_1) \times_{P(R')} P(R_2)$.

Wir zeigen zuerst, dass $\forall (x_1, x_2) \in M(P_1, \xi, P_2)$

$(t_1(x_1), t_2(x_2)) \in M(P'_1, \xi', P'_2)$ gilt.

Betrachte folgende Gleichungen

$$F_2(t_2)\xi = \xi'F_1(t_1), \quad \xi f_{1*}(x_1) = f_{2*}(x_2).$$

Daraus folgt :

$$\begin{aligned} \xi'(f_{1*}(t_1(x_1))) &= \xi'F_1(t_1)(f_{1*}(x_1)) \\ &= F_2(t_2)\xi(f_{1*}(x_1)) \\ &= F_2(t_2)(f_{2*}(x_2)) = f_{2*}(t_2(x_2)), \end{aligned}$$

d.h. $(t_1(x_1), t_2(x_2)) \in M(P'_1, \xi', P'_2)$ nach 1.3.

Es ist nun klar, dass die Abbildung $M((t_1, t_2))$ Morphismus in $P(R)$ ist. Damit ist gezeigt, dass M Funktor ist.

Sei $g : M(B) \rightarrow M(B')$ mit $B := (P_1, \xi, P_2)$, $B' := (P'_1, \xi', P'_2)$ ein beliebiger Morphismus in $\mathbf{P}(R)$.

Sei $w_1 : P_1 \rightarrow P'_1$ Morphismus in $\mathbf{P}(R_1)$ ($i=1,2$), der durch folgendes Diagramm definiert ist:

$$\begin{array}{ccc} R_1 \otimes_R M(B) & \xrightarrow{H_1(g)} & R_1 \otimes_R M(B') \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ P_1 & \xrightarrow{w_1} & P'_1 \end{array} \quad (i=1,2),$$

wobei die vertikalen Abbildungen nach 1.4(c) die kanonischen Isomorphismen sind.

Seien $x_1 \in P_1$, $x'_1 \in P'_1$, $i=1,2$, mit $(x_1, x_2) \in M(B)$, $(x'_1, x'_2) = g(x_1, x_2)$. Nach Definition von w_1 folgt $w_1(x_1) = x'_1$.

Es ist klar, dass $M((w_1, w_2)) = g$ mit $(w_1, w_2) \in \text{Hom}(B, B')$ gilt.

Da der Funktor M offenbar treu ist, folgt mit 1.4(b) die Behauptung.

1.6 Bezeichnung :

Sei $\pi_1 : R' \otimes_{R_1} \xrightarrow{\cong} R' : \pi_1(x \otimes y) = x f_1(y) \quad (x \in R', y \in R_1)$

der kanonische R' -Modul-Isomorphismus ($i=1,2$). Für einen Ring S bezeichne $U(S)$ die Einheitengruppe von S , und für $s \in S$ sei $\hat{s} : S \rightarrow S : x \mapsto xs$ die Rechtsmultiplikation mit s .

1.7 Proposition :

$M(R_1, \pi_2^{-1} \pi_1, R_2)$ ist frei über R mit
 $M(R_1, \pi_2^{-1} \pi_1, R_2) = R_1 \times_{R'} R_2 = R(1, 1).$

Beweis : Sei $(r_1, r_2) \in R_1 \times_{R'} R_2$. Dann gilt:

$$(r_1, r_2) \in M(R_1, \pi_2^{-1} \pi_1, R_2)$$

$$\Leftrightarrow (\pi_2^{-1} \pi_1)(f_{1*}(r_1)) = f_{2*}(r_2)$$

$$\Leftrightarrow f_{1*}(r_1) \otimes_{R_2} 1 = f_{2*}(r_2) \otimes_{R_2} 1$$

$$\Leftrightarrow f_{1*}(r_1) = f_{2*}(r_2) \Leftrightarrow (r_1, r_2) \in R_1 \times_{R'} R_2.$$

1.8 Satz :

Seien $u, v \in U(R')$. Dann ist

$$M(R_1, \pi_2^{-1} \hat{u} \pi_1, R_2) \cong M(R_1, \pi_2^{-1} \hat{v} \pi_1, R_2)$$

genau dann, wenn $r_i \in U(R_i)$ ($i=1, 2$) existieren mit

$$f_{1*}(r_1)v = uf_{2*}(r_2).$$

Sind insbesondere $u, v \in U(R')$ mit $uv^{-1} \in f_{1*}(U(R_1))$ oder $u^{-1}v \in f_{2*}(U(R_2))$, dann ist

$$M(R_1, \pi_2^{-1} \hat{u} \pi_1, R_2) \cong M(R_1, \pi_2^{-1} \hat{v} \pi_1, R_2).$$

Beweis : Nach 1.5 ist

$$M(R_1, \pi_2^{-1} \hat{u} \pi_1, R_2) \cong M(R_1, \pi_2^{-1} \hat{v} \pi_1, R_2) \text{ genau dann, wenn}$$

$$(R_1, \pi_2^{-1} \hat{u} \pi_1, R_2) \cong (R_1, \pi_2^{-1} \hat{v} \pi_1, R_2),$$

d.h. wenn $r_i \in U(R_i)$ ($i=1,2$) existieren mit

$$F_2(\hat{r}_2) \pi_2^{-1} \hat{u} \pi_1 = \pi_2^{-1} \hat{v} \pi_1 F_1(\hat{r}_1).$$

$$\text{Wegen } (F_2(\hat{r}_2) \pi_2^{-1} \hat{u} \pi_1)(1 \otimes 1) = \underset{R_1}{uf_2(r_2)} \otimes 1 \text{ und}$$

$$(\pi_2^{-1} \hat{v} \pi_1 F_1(\hat{r}_1))(1 \otimes 1) = f_1(r_1) \underset{R_1}{v} \otimes 1$$

folgt die erste Behauptung.

Sei $uv^{-1} \in f_1(U(R_1))$. Dann ist $u = uf_2(1) = f_1(r_1)v$ für ein $r_1 \in U(R_1)$. Also gilt die zweite Behauptung nach der ersten Behauptung.

1.9 Folgerung :

Sei $P \in \mathcal{P}(R)$ mit $R_1 \otimes P \cong R_1$, $R_2 \otimes P \cong R_2$ als R_1 - bzw.

R_2 - Linksmoduln. Ist $f_1(U(R_1)) = U(R')$ oder $f_2(U(R_2)) = U(R')$, dann ist P frei und zwar gilt $P \cong R$.

Beweis : Nach 1.4(b) ist $P \cong M(R_1 \otimes_P R_2 \otimes P)$.

Sei $\xi : R_1' \otimes_{R_1} R_2 \rightarrow R_1' \otimes_{R_2} R_2$ der R_1' -Homomorphismus, der durch

folgendes Diagramm definiert ist:

$$\begin{array}{ccc} R_1' \otimes_{R_1} (R_1 \otimes_P R_2 \otimes P) & \xrightarrow{\varphi_P} & R_1' \otimes_{R_2} (R_2 \otimes_P R_2 \otimes P) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ R_1' \otimes_{R_1} R_2 & \xrightarrow{\xi} & R_1' \otimes_{R_2} R_2 \end{array}$$

Dann ist $\xi = \pi_2^{-1} \hat{u} \pi_1$ für ein $u \in U(R_1')$ (1.6).

Nach 1.5 ist $M(R_1 \otimes_P R_2 \otimes P) \cong M(R_1, \pi_2^{-1} \hat{u} \pi_1, R_2)$. Nach 1.8 ist $M(R_1, \pi_2^{-1} \hat{u} \pi_1, R_2) \cong M(R_1, \pi_2^{-1} \pi_1, R_2)$, da $u \in f_1(U(R_1))$ oder $u \in f_2(U(R_2))$ ist. Also ist $P \cong R$ nach 1.7.

1.10 Lemma : ([1] IX 5.5)

Gegeben seien ein Ring A und zweiseitige Ideale p_1, p_2 in A mit $p_1 \cap p_2 = 0$. Dann ist folgendes Quadrat von kanonischen Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A/p_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/p_1 & \rightarrow & A/p_1 + p_2 \end{array}$$

ein Faserprodukt diagramm.

1.11 Lemma : ([1] IX 5.6)

A sei ein Unterring eines Ringes B. C sei ein zweiseitiges Ideal in B, das in A enthalten ist. Dann ist folgendes kommutative Quadrat von kanonischen Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/C & \rightarrow & B/C \end{array}$$

ein Faserprodukt diagramm.

§2. Rang

2.1 Definition :

Sei R ein Integritätsring mit Quotientenkörper K . A sei eine endlich dimensionale K -Algebra. Λ sei eine R -Ordnung in A , d.h. Λ ist R -Unteralgebra von A , die als R -Modul endlich erzeugt ist und eine K -Basis von A enthält.

Ein Λ -Modul M hat Rang n , falls $K \otimes_R M \cong (K \otimes_R \Lambda)^n$ als

Moduln über $K \otimes_R \Lambda \cong A$ gilt, wobei $(k \otimes \lambda)(1 \otimes x) := k\lambda \otimes \lambda x$

für $k, \lambda \in K$, $x \in M, \lambda \in \Lambda$ ist.

Eine R -Ordnung Λ ist eine R -Algebra, die als R -Modul endlich erzeugt und torsionsfrei ist, die also bis auf Isomorphie

R -Ordnung in $A = K \otimes_R \Lambda$ ist.

2.2 Proposition :

Gegeben seien zwei Ordnungen Σ, Λ über einem Integritätsring und ein Ringhomomorphismus $f : \Lambda \rightarrow \Sigma$. Dann gilt:

Ist M ein Λ -Modul vom Rang n , dann ist auch $\Sigma \otimes_{\Lambda} M$ vom Rang n .

Beweis : Die Behauptung folgt aus der Kette von kanonischen Isomorphismen

$$\begin{aligned}
 K \otimes_R (\Sigma \otimes_{\Lambda} M) &\cong ((K \otimes_R \Sigma) \otimes_{K \otimes_R \Lambda} (K \otimes_R \Lambda)) \otimes_{\Lambda} M \\
 &\cong (K \otimes_R \Sigma) \otimes_{K \otimes_R \Lambda} ((K \otimes_R \Lambda) \otimes_{\Lambda} M) \cong (K \otimes_R \Sigma) \otimes_{K \otimes_R \Lambda} (K \otimes_R M) \\
 &\cong (K \otimes_R \Sigma) \otimes_{K \otimes_R \Lambda} (K \otimes_R \Lambda)^n \cong (K \otimes_R \Sigma)^n.
 \end{aligned}$$

2.3 Proposition :

Λ sei eine Ordnung über einem noetherschen Integritätsring R .

Jeder projektive Λ -Modul vom Rang 1 ist dann isomorph zu einem Ideal von Λ .

Beweis : Wegen $K \otimes_R \Lambda \cong K \otimes_R P$ ist P als Λ -Modul isomorph

zu einem Λ -Untermodul Q von $\Lambda_S \cong K \otimes_R \Lambda$, wobei $S := \{s \in R \mid s \neq 0\}$.

Da Q R -endlich erzeugt ist, gibt es ein $s \in S$: $Q \subset \Lambda \cdot \frac{1}{s}$.

Also ist $P \cong Q \cong sQ \subset \Lambda$.

2.4 Satz :

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda & \rightarrow & \Sigma_2 \\
 \downarrow & & \downarrow j_2 \\
 \Sigma_1 & \xrightarrow{j_1} & \Gamma
 \end{array}$$

sei ein Faserprodukt diagramm von Ringen, wobei j_1 oder j_2

surjektiv und $\Lambda, \Sigma_1, \Sigma_2$ Ordnungen über einem Integritätsring sind.

- (1) Jeder projektive Σ_1 -Modul vom Rang 1 sei frei ($i=1,2$).
 Dann gibt es zu jedem projektiven Λ -Modul P vom Rang 1
 ein $u \in U(\Gamma)$ mit

$$P \cong M(\Sigma_1, \pi_2^{-1} \hat{u} \pi_1, \Sigma_2) .$$

- (2) Ausser der Bedingung (1) gelte noch zusätzlich

$$j_1(U(\Sigma_1)) = U(\Gamma) \quad \text{oder} \quad j_2(U(\Sigma_2)) = U(\Gamma) .$$

Dann ist jeder projektive Λ -Modul vom Rang 1 frei.

Beweis : Nach 1.9 und 2.2.

2.5 Satz :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \rightarrow & \Sigma \\ \downarrow & & \downarrow j_2 \\ A & \rightarrow & B \\ j_1 & & \end{array}$$

sei ein Faserprodukt diagramm von Ringen, wobei j_1 oder j_2
 surjektiv sei mit folgenden Bedingungen:

- (1) Λ, Σ seien Ordnungen über einem Integritätsring. Jeder
 projektive Σ -Modul vom Rang 1 ist frei.
 (2) A sei ein lokaler Ring.
 (3) $j_1(U(A)) = U(B)$ oder $j_2(U(\Sigma)) = U(B)$.

Dann ist jeder projektive Λ -Modul vom Rang 1 frei.

Beweis : Sei $P \in \mathcal{P}(\Lambda)$ vom Rang 1. Nach 2.2 ist $\Sigma \otimes_{\Lambda} P$

projektiver Σ -Modul vom Rang 1. Nach (1) ist $\Sigma \otimes_{\Lambda} P \cong \Sigma$.

Wegen (2) ist $A \otimes_{\Lambda} P \cong A^n$ für ein $n \geq 1$.

Wegen $B \otimes_{\Sigma} (\Sigma \otimes_{\Lambda} P) \cong B \otimes_A (A \otimes_{\Lambda} P)$ ist $A \otimes_{\Lambda} P \cong A$. Nun folgt die

Behauptung nach 1.9.

2.6 Bemerkung :

Sei k ein Körper der Charakteristik $p \neq 0$, und sei Π eine endliche p -Gruppe. Dann ist $k[\Pi]$ lokal, und es gilt

$$U(k[\Pi]) = \{x = \sum r_g g \mid \sum r_g \neq 0\}.$$

Beweis : $k[\Pi]$ ist lokal nach [13], 4.4. Ausserdem ist

$$\varepsilon : k[\Pi] \rightarrow k, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad g \in \Pi$$

ein Epimorphismus von Ringen. Also ist der Kern von ε das maximale Ideal von $k[\Pi]$ und

$$U(k[\Pi]) = \{x \in k[\Pi] \mid x \notin K(\varepsilon)\}.$$

§3. Quaternionengruppen, Diedergruppen

3.1 Satz(Hölder) :

Gegeben seien vier ganze Zahlen n, m, t, r mit $0 < n, m, r^n \equiv 1 \pmod{m}$,
 $t(r-1) \equiv 0 \pmod{m}$. Die Gruppe $([10] 1.5 b)$

$$\mathcal{G}(x, y \mid x^m = e, y^n = x^t, yxy^{-1} = x^r)$$

ist dann von der Ordnung $m \cdot n$ und die zyklische Untergruppe
 $\langle x \rangle$ ist Normalteiler vom Index n .

Beweis : [14] III §7.Satz 20.

3.2 Folgerung :

Sei $t \geq 1$ eine ganze Zahl.

(1) Q_{4t} (bzw. D_{2t}) bezeichne die Gruppe

$$\mathcal{G}(x, y \mid x^{2t} = e, y^2 = x^t, yxy^{-1} = x^{-1})$$

$$(\text{bzw. } \mathcal{G}(a, b \mid a^t = e, b^2 = a^t = e, bab^{-1} = a^{-1}))$$

$([10] 1.5 b)$. Die Gruppe Q_{4t} ist dann von der Ordnung $4t$.
Die zyklische Untergruppe $\langle x \rangle$ ist Normalteiler vom Index 2.
Jedes Element $w \in Q_{4t}$ hat eine eindeutige Darstellung der
Form

$$w = x^1 y^\delta, \quad 0 \leq 1 < 2t, \quad \delta = 0, 1.$$

Die Gruppe D_{2t} ist die Diedergruppe der Ordnung $2t$. Die zyklische Untergruppe $\langle a \rangle$ ist Normalteiler vom Index 2. Jedes Element $d \in D_{2t}$ hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$d = a^k b^\delta, \quad 0 \leq k < t, \quad \delta = 0, 1.$$

(2) In $Q_{4t} = \mathbb{Q}(x, y)$ ist $x^t = y^2$ zentrales Element der Ordnung 2.

In $D_{4t} = \mathbb{Q}(a, b)$ ist a^t zentrales Element der Ordnung 2.

Beweis : (1) Aus 3.1 folgt sofort die Behauptung.

(2) Für Q_{4t} gilt: $yx = x^{-1}y = x^{2t-1}y$, $yx^t = x^{2t-t}y = x^t y$.

Ebenso folgt die Behauptung für D_{4t} .

3.3 Lemma :

G sei eine endliche Gruppe. H sei ein Normalteiler von G . R sei ein unitärer Ring. Dann ist $\sum_{h \in H} R[G](e-h)$ der Kern des kanonischen

Ringhomomorphismus von $R[G]$ nach $R[G/H]$.

Beweis : [4], S. 153, Lemma 1.

3.4 Bezeichnungen :

Wir halten von jetzt ab in §3 folgende Bezeichnungen fest:

$t \geq 1$ sei eine ganze Zahl.

$$Q_{4t} := \mathbb{G}(x, y \mid x^{2t} = e, x^t = y^2, yxy^{-1} = x^{-1})$$

$$D_{2t} := \mathbb{G}(a, b \mid a^t = e, a^t = b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1})$$

$$D_{4t} := \mathbb{G}(a', b' \mid a'^{2t} = e, a'^{2t} = b'^2 = e, b'a'b'^{-1} = a'^{-1})$$

3.5 Proposition :

Folgende Folgen von kanonischen Gruppenhomomorphismen sind exakt:

$$e \rightarrow \langle y^2 \rangle \rightarrow Q_{4t} \rightarrow D_{2t} \rightarrow e$$

$$e \rightarrow \langle a'^t \rangle \rightarrow D_{4t} \rightarrow D_{2t} \rightarrow e$$

Beweis : Aus dem Satz von Dyck ([10] 1.5 g) folgen sofort die Behauptungen. Dabei ist $\text{kan} : Q_{4t} \rightarrow D_{2t}$ bzw.

$\text{kan} : D_{4t} \rightarrow D_{2t}$ durch

$\text{kan}(x) = a, \text{kan}(y) = b$ bzw. $\text{kan}(a') = a, \text{kan}(b') = b$ definiert.

3.6 Proposition :

R sei ein Ring. Dann gilt:

$$R[Q_{4t}]/(e-y^2) \cong R[D_{2t}], \quad R[D_{2t}]/(e-a'^t) \cong R[D_{2t}]$$

als R -Algebren.

Beweis : Aus 3.3, 3.5 folgen die Behauptungen, da
 $|\langle y^2 \rangle| = |\langle a'^t \rangle| = 2$ sind.

3.7 Proposition :

Λ_{2t} (bzw. Γ_{2t}) bezeichne die $\mathbb{Z}$ -Algebra $\mathbb{Z}[Q_{4t}]/(e+y^2)$
 (bzw. $\mathbb{Z}[D_{4t}]/(e+a'^t)$).

$$\{\bar{x}^1 \bar{y}^\delta \mid 0 \leq 1 < t, \delta = 0, 1\}$$

ist dann eine $\mathbb{Z}$ -Basis von Λ_{2t} , wobei $\bar{x} = x + (e + y^2)$,
 $\bar{y} = y + (e + y^2)$ sind.

$$\{\bar{a}'^k \bar{b}'^\delta \mid 0 \leq k < t, \delta = 0, 1\}$$

ist dann eine $\mathbb{Z}$ -Basis von Γ_{2t} , wobei $\bar{a}' = a' + (e + a'^t)$,
 $\bar{b}' = b' + (e + a'^t)$ sind.

Beweis : Wegen $Q_{4t}(e + y^2) = \{x^1 y^\delta + x^{1+t} y^\delta \mid 0 \leq 1 < t, \delta = 0, 1\}$,

ist $Q_{4t}(e + y^2)$ eine Menge von $2t$ linear unabhängigen
 Elementen aus $\mathbb{Q}[Q_{4t}]$. Also hat $\mathbb{Q}[Q_{4t}]/(e + y^2)$ die $\mathbb{Q}$ -Dimension
 $2t$. Deshalb ist auch $\mathbb{Q}[Q_{4t}]/(e + y^2)$ $2t$ -dimensional über $\mathbb{Q}$.

Da die Menge

$$\{\bar{x}^1 \bar{y}^\delta \mid 0 \leq 1 < t, \delta = 0, 1\}$$

offenbar $\mathbb{Z}$ -Erzeugendensystem von Λ_{2t} ist, gibt es einen
 Epimorphismus

$$\mathbb{Z}^{2t} \rightarrow \Lambda_{2t},$$

der eine Basis von $\mathbb{Z}^{2t}$ auf das obige Erzeugendensystem abbildet.

In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{2t} & \rightarrow & \Lambda_{2t} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}^{2t} & \rightarrow & \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_{2t} \cong \mathbb{Q}[\mathbb{Q}_{4t}]/(e + y^2) \end{array}$$

ist die untere Abbildung surjektiv, also (da $\mathbb{Q}[\mathbb{Q}_{4t}]/(e + y^2)$ die $\mathbb{Q}$ -Dimension $2t$ hat) bijektiv. Deshalb ist auch $\mathbb{Z}^{2t} \rightarrow \Lambda_{2t}$ bijektiv.

Analog folgt die Behauptung für Γ_{2t} .

3.8 Proposition :

Sei G eine endliche Gruppe und sei $z \in G$ ein zentrales Element der Ordnung 2. Dann ist das Diagramm von kanonischen Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G/\langle z \rangle] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[G]/(e + z) & \rightarrow & \mathbb{F}_2[G/\langle z \rangle] \end{array}$$

ein Faserprodukt diagramm.

Beweis : $\mathbb{Z}[G](e + z)$, $\mathbb{Z}[G](e - z)$ sind zweiseitige Ideale, da z zentral ist. Ausserdem gilt $(e + z) \cap (e - z) = 0$. Dann folgt für $v, w \in \mathbb{Z}[G]$ mit $v(e + z) = w(e - z)$:

$$0 = v(e - z^2) = v(e + z)(e - z) = w(e - z)^2 = w2(e - z),$$

also $w(e - z) = 0$. Nach 1.10 ist dann

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G]/(e - z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[G]/(e + z) & \rightarrow & \mathbb{Z}[G]/(e + z) + (e - z) \end{array}$$

ein Faserprodukt diagramm. Nach 3.3 ist $\mathbb{Z}[G]/(e - z) \cong \mathbb{Z}[G/(z)]$.

Das Diagramm von kanonischen Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[G]/(e - z) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}[G/(z)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[G]/(e - z) + (e + z) & \rightarrow & \mathbb{F}_2[G/(z)] \end{array}$$

ist kommutativ. Da $\mathbb{Z}[G]/(e - z) + (e + z)$ von 2 annulliert wird,

ist $\mathbb{Z}[G]/(e - z) + (e + z)$ ein $\mathbb{F}_2$ -Modul, der von $|G/(z)|$

Elementen erzeugt wird. Also ist die untere Abbildung bijektiv.

Durch Komposition der beiden Diagramme folgt die Behauptung.

3.9 Satz :

(1) Das Quadrat der kanonischen Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[Q_{4t}] & \rightarrow & \mathbb{Z}[D_{2t}] \\ \downarrow & & \downarrow j_2 \\ \Lambda_{2t} & \xrightarrow{j_1} & \mathbb{F}_2[D_{2t}] \end{array}$$

ist ein Faserprodukt diagramm, wobei j_1, j_2 surjektiv sind.

(2) Das Quadrat der kanonischen Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}[D_{4t}] & \rightarrow & \mathbb{Z}[D_{2t}] \\
 \downarrow & & \downarrow g_2 \\
 \Gamma_{2t} & \xrightarrow[g_1]{} & \mathbb{F}_2[D_{2t}]
 \end{array}$$

ist ein Faserprodukt diagramm, wobei g_1, g_2 surjektiv sind.

Beweis : Mit 3.2 und 3.5 folgt die Behauptung aus 3.8.

§4. Die Einheiten in $\mathbb{Z}[\mathbb{D}_2^n]$ ($n=1,2,3$)

Aus [2] Theorem 11 folgen Propositionen 4.1 und 4.2. Als Beispiel für die Anwendung von Satz 3.8 beweisen wir aber die beiden Propositionen unabhängig von [2].

Für einen Ring R bezeichnet $U(R)$ die Einheitengruppe. Offenbar erhält der Funktor U Faserprodukt diagramme von Ringen. Also lässt sich 3.9 zur Berechnung der Einheiten verwenden.

4.1 Proposition :

$$U(\mathbb{Z}[\mathbb{D}_2]) = \{\pm d \mid d \in \mathbb{D}_2\}.$$

Beweis : $\mathbb{D}_2 = \langle a, b \mid a^2 = e, b^2 = a = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$

ist die zyklische Gruppe der Ordnung 2. Da b zentrales Element der Ordnung 2 ist, folgt mit 3.8 das Faserprodukt diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\mathbb{D}_2] & \xrightarrow{i_2} & \mathbb{Z} \\ i_1 \downarrow & & \downarrow j_2 \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{j_1} & \mathbb{F}_2 \end{array}$$

wobei $i_1(b) = -1$, $i_2(b) = 1$, $j_1 = j_2 = \text{kan}$ gilt.

Wegen $U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$ folgt $U(\mathbb{Z}[\mathbb{D}_2]) \xrightarrow{\cong} U(\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z})$, also die Behauptung.

4.2 Proposition :

$$U(\mathbb{Z}[D_4]) = \{\pm d \mid d \in D_4\}.$$

Beweis : Nach 3.7 hat Γ_2 die Basis $\{e, \bar{v}'\}$ (mit den Bezeichnungen von 3.7 und $t = 1$). Also ist $\Gamma_2 \cong \mathbb{Z}[D_2]$, und

$$\mathbb{Z}[D_2] \cong \Gamma_2 \xrightarrow{\text{kan}} F_2[D_2]$$

ist die kanonische Abbildung. Nach 3.9 folgt

$$U(\mathbb{Z}[D_4]) \cong U(\mathbb{Z}[D_2]) \times_{U(F_2[D_2])} U(\mathbb{Z}[D_2]) = \{(\pm d, \pm d) \mid d \in D_2\}.$$

Da $\{\pm d \mid d \in D_4\}$ 8 Einheiten von $\mathbb{Z}[D_4]$ sind, folgt die Behauptung aus $|\{(\pm d, \pm d) \mid d \in D_2\}| = 8$.

4.3 Proposition :

Sei $D_8 = \langle a, b \mid a^4 = e, b^2 = a^4 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$.

Γ_4 sei die $\mathbb{Z}$ -Algebra $\mathbb{Z}[D_8]/(e + a^2)$.

Sei $\mathfrak{M} = \left\{ \begin{pmatrix} k & m \\ n & l \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid k - l, n - m \in 2\mathbb{Z} \right\}$,

wobei $M_2(\mathbb{Z})$ der Ring der 2×2 Matrizen über $\mathbb{Z}$ ist.

Dann haben wir:

(1) $\mathfrak{M}$ ist $\mathbb{Z}$ -Unteralgebra von $M_2(\mathbb{Z})$.

$$(2) \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine $\mathbb{Z}$ -Basis von $\mathfrak{M}$ als $\mathbb{Z}$ -Modul.

(3) Die Abbildung $f: \Gamma_4 \rightarrow \mathfrak{M}$:

$$t_0 \bar{e} + t_1 \bar{a} + t_2 \bar{b} + t_3 \bar{a}\bar{b} \mapsto \begin{pmatrix} t_0+t_2 & t_1-t_3 \\ -t_1-t_3 & t_0-t_2 \end{pmatrix}$$

ist $\mathbb{Z}$ -Algebraisomorphismus, wobei $\{e, \bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}\}$ die kanonische $\mathbb{Z}$ -Basis von Γ_4 , und $t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$ sind.

Beweis: (1) Es ist klar, dass $\mathfrak{M}$ additive Untergruppe von $M_2(\mathbb{Z})$ ist. Selen

$$u = \begin{pmatrix} k & m \\ n & 1 \end{pmatrix}, \quad u' = \begin{pmatrix} k' & m' \\ n' & 1' \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathfrak{M}.$$

$$\text{Dann ist } uu' = \begin{pmatrix} kk'+mn' & km'+ml' \\ nk'+ln' & nm'+ll' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Wegen } kk'+mn' - nm' - ll' &= (k-1)k' + 1(k'-1') \\ &\quad + (m-n)n' - n(m'-n') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } km'+ml' - nk' - ln' &= (m-n)1' - n(k'-1') \\ &\quad + (m'-n')k + n'(k-1) \end{aligned}$$

folgt $uu' \in \mathfrak{M}$.

- (2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist offenbar $\mathbb{Z}$ -linear unabhängig in $\mathbb{M}$.

Sei $\begin{pmatrix} k & m \\ n & l \end{pmatrix} \in \mathbb{M}$, d.h. $\begin{pmatrix} k & m \\ n & l \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ mit $k - l = 2s_2$,

$m - n = 2s_1$ für gewisse $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$. Setze

$s_0 = k - s_2$, $s_3 = s_1 - m$. Dann sind

$k = s_0 + s_2$, $l = s_0 - s_2$, $m = s_1 - s_3$, $n = -s_1 - s_3$. Daher ist

$$s_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} s_0 + s_2 & s_1 - s_3 \\ -s_1 - s_3 & s_0 - s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & m \\ n & l \end{pmatrix}.$$

- (3) Betrachte die Multiplikationstafel der $\mathbb{Z}$ -Basis $\{e, \bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\bar{b}\}$ von Γ_4 :

	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}\bar{b}$
e	e	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}\bar{b}$
$\bar{a}$	$\bar{a}$	-e	$\bar{a}\bar{b}$	$-\bar{b}$
$\bar{b}$	$\bar{b}$	$-\bar{a}\bar{b}$	e	$-\bar{a}$
$\bar{a}\bar{b}$	$\bar{a}\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{a}$	e

Nun ist es klar, dass die Abbildung f $\mathbb{Z}$ -Algebraisomorphismus ist.

4.4 Folgerung :

Wir verwenden die Bezeichnungen von 4.3.

Sei $u = r_0 e + r_1 \bar{a} + r_2 \bar{b} + r_3 \bar{a}\bar{b} \in \Gamma_4$, wobei $r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Z}$ sind.

Dann gilt:

$$u \in U(\Gamma_4) \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} r_0 + r_2 & r_1 - r_3 \\ -r_1 - r_3 & r_0 - r_2 \end{pmatrix} = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow r_0^2 - r_2^2 - r_3^2 + r_1^2 = \pm 1.$$

Beweis : Aus 4.3 folgt die Behauptung sofort.

4.5 Lemma :

m, n seien ganze Zahlen mit $m \notin 2\mathbb{Z}$, $n \in 4\mathbb{Z}$. Dann ist $m^2 - n \neq -1$.

Beweis : Sei $m = 2r + 1$, $n = 4s$, $r, s \in \mathbb{Z}$. Aus $m^2 - n = -1$ folgt $4r^2 + 4r + 1 - 4s = -1$, also $2(r^2 + r - s) = -1$, d.h. ein Widerspruch.

4.6 Folgerung :

Sei $D_8 = \langle a, b \mid a^4 = e, b^2 = a^4 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$. Sei ferner $D_4 = \langle a, b \mid a^2 = e, b^2 = a^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$. Dann gilt

$$U(\mathbb{Z}[D_8]) =$$

$$\left\{ \frac{1}{2}(t_0 \pm 1)e + t_1 a + t_2 b + t_3 ab - \frac{1}{2}(t_0 \mp 1)a^2 - t_1 a^3 - t_2 a^2 b - t_3 a^3 b \mid \right. \\ \left. t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}, t_0 \notin 2\mathbb{Z}, t_0^2 - 4(t_2^2 + t_3^2 - t_1^2) = 1 \right\}$$

$$\cup \left\{ t_0 e + \frac{1}{2}(t_1 \pm 1)a + t_2 b + t_3 ab - t_0 a^2 - \frac{1}{2}(t_1 \mp 1)a^3 - t_2 a^2 b - t_3 a^3 b \mid \right. \\ \left. t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}, t_1 \notin 2\mathbb{Z}, t_1^2 - 4(t_2^2 + t_3^2 - t_0^2) = 1 \right\}$$

$$\cup \left\{ t_0 e + t_1 a + \frac{1}{2}(t_2 \pm 1)b + t_3 ab - t_0 a^2 - t_1 a^3 - \frac{1}{2}(t_2 \mp 1)a^2 b - t_3 a^3 b \mid \right. \\ \left. t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}, t_2 \notin 2\mathbb{Z}, t_2^2 - 4(t_0^2 + t_1^2 - t_3^2) = 1 \right\}$$

$$U \{ t_0 e + t_1 a + t_2 b + \frac{1}{2}(t_3 \pm 1) ab - t_0 a^2 - t_1 a^3 - t_2 a^2 b - \frac{1}{2}(t_3 \mp 1) a^3 b \mid \\ t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}, t_3 \notin 2\mathbb{Z}, t_3^2 - 4(t_0^2 + t_1^2 - t_2^2) = 1 \}.$$

Beweis : Seien $t'_0, t'_1, \dots, t'_7 \in \mathbb{Z}$. Sei

$$u = t'_0 e + t'_1 a + t'_2 b + t'_3 ab + t'_4 a^2 + t'_5 a^3 + t'_6 a^2 b + t'_7 a^3 b \in \mathbb{Z}[D_8]$$

In dem Diagramm von 3.9 seien v, w die Bilder von u in $\mathbb{Z}[D_4]$, Γ_4 . Dann ist

$$v = (t'_0 + t'_4)e + (t'_1 + t'_5)a + (t'_2 + t'_6)b + (t'_3 + t'_7)ab \in \mathbb{Z}[D_4],$$

$$w = (t'_0 - t'_4)e + (t'_1 - t'_5)a + (t'_2 - t'_6)b + (t'_3 - t'_7)ab \in \Gamma_4.$$

Nach 3.9 gilt:

$$u \in U(\mathbb{Z}[D_8]) \Leftrightarrow v \in U(\mathbb{Z}[D_4]) \text{ und } w \in U(\Gamma_4).$$

Nach 4.2 gilt: $v \in U(\mathbb{Z}[D_4]) \Leftrightarrow v = \pm d$, $d \in D_4$.

Also folgt mit 4.4 und 4.5:

$$u \in U(\mathbb{Z}[D_8]) \Leftrightarrow (1) \quad t'_0 + t'_4 = \pm 1, \quad t'_1 + t'_5 = 0, \quad t'_2 + t'_6 = 0, \quad t'_3 + t'_7 = 0 \\ (t'_0 - t'_4)^2 - 4t_2^2 - 4t_3^2 + 4t_1^2 = 1$$

oder

$$(2) \quad t'_1 + t'_5 = \pm 1, \quad t'_0 + t'_4 = 0, \quad t'_2 + t'_6 = 0, \quad t'_3 + t'_7 = 0 \\ 4t_0^2 - 4t_2^2 - 4t_3^2 + (t'_1 - t'_5)^2 = 1$$

oder

$$(3) \quad t'_2 + t'_6 = \pm 1, \quad t'_0 + t'_4 = 0, \quad t'_1 + t'_5 = 0, \quad t'_3 + t'_7 = 0 \\ -4t_0^2 + (t'_2 - t'_6)^2 + 4t_3^2 - 4t_1^2 = 1$$

oder

$$(4) \quad t'_3 + t'_7 = \pm 1, \quad t'_0 + t'_4 = 0, \quad t'_1 + t'_5 = 0, \quad t'_2 + t'_6 = 0 \\ -4t_0^2 + 4t_2^2 + (t'_3 - t'_7)^2 - 4t_1^2 = 1.$$

Daraus folgt die Behauptung.

§5. Projektive $\mathbb{Z}[D_n]$ -Moduln von Rang 1 ($n=1,2,3$)

Die Ergebnisse dieses § sind nach Martinet [5] bekannt. In [5] werden die Beweise nur angedeutet. Wir geben andere Beweise durch Anwendung des Faserproduktendiagramms in 3.9.

5.1 Proposition :

Seien D_2, D_4 Diedergruppen der Ordnung 2 bzw. 4. Jeder projektive $\mathbb{Z}[D_i]$ -Modul vom Rang 1 ist dann frei ($i=2,4$).

Beweis : Aus dem Beweis von 4.1 und 4.2 haben wir folgende Faserproduktendiagramme von Ringepimorphismen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[D_2] & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{F}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[D_4] & \rightarrow & \mathbb{Z}[D_2] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[D_2] & \rightarrow & \mathbb{F}_2[D_2] \end{array}$$

Da jedes Ideal in $\mathbb{Z}$ freilist und $U(\mathbb{Z}) \cong U(\mathbb{F}_2)$ gilt, ist nach 2.4 jeder projektive $\mathbb{Z}[D_2]$ -Modul vom Rang 1 frei. Wegen $U(\mathbb{F}_2[D_2]) = D_2$ ist $U(\mathbb{Z}[D_2]) \cong U(\mathbb{F}_2[D_2])$. Also folgt mit 2.4 die Behauptung für $\mathbb{Z}[D_4]$.

5.2 Proposition :

Sei $M_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 1$, der Ring der $n \times n$ $\mathbb{Z}$ -Matrizen. Jeder projektive $M_n(\mathbb{Z})$ -Modul vom Rang 1 ist frei.

Beweis : $P := \mathbb{Z}^n$ ist $\mathbb{Z}$ -Progenerator mit $M_n(\mathbb{Z}) = \text{End}_{\mathbb{Z}}(P)$.

Nach den Morita-Sätzen ([2] Chapter II) ist

$$P(\mathbb{Z}) \rightarrow P(M_n(\mathbb{Z}))$$

$$X \mapsto \begin{matrix} P & \otimes & X \\ M_n(\mathbb{Z}) & \mathbb{Z} & \end{matrix} \cong X^n$$

eine Äquivalenz von Kategorien. Jeder endlich erzeugte projektive $M_n(\mathbb{Z})$ -Modul Y hat also die Form $Y \cong P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^m \cong \mathbb{Z}^{nm}$ (da jeder Modul aus $P(\mathbb{Z})$ frei ist). Aus der angegebenen Äquivalenz folgt für $Y, Z \in P(M_n(\mathbb{Z}))$ und $Y \cong Z$ als $\mathbb{Z}$ -Moduln bereits $Y \cong Z$ als $M_n(\mathbb{Z})$ -Moduln. Hat Y den Rang 1, so folgt $m = n$, und es gilt $Y \cong \mathbb{Z}^{n \cdot n} \cong M_n(\mathbb{Z})$.

5.3 Proposition :

$\mathfrak{M}$ sei der in 4.3 angegebene Unterring von $M_2(\mathbb{Z})$. Dann ist jeder projektive $\mathfrak{M}$ -Modul vom Rang 1 frei.

Beweis : Die kanonische Folge

$$0 \rightarrow M_2(2\mathbb{Z}) \rightarrow M_2(\mathbb{Z}) \rightarrow M_2(\mathbb{F}_2) \rightarrow 0$$

ist exakt. Das zweiseitige Ideal

$$M_2(2\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \mid k, l, m, n \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

liegt in $\mathfrak{M}$, und es gilt nach Definition von $\mathfrak{M}$

$$\text{Bild } (\mathbb{M} \rightarrow M_2(\mathbb{F}_2)) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_2 \right\}$$

$$= \mathbb{F}_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \mathbb{F}_2[D_2].$$

Nach 1.11 gibt es also ein Faserprodukt diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M} & \rightarrow & M_2(\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}_2[D_2] & \rightarrow & M_2(\mathbb{F}_2) \end{array} \quad . \text{ Offenbar ist}$$

$$U(M_2(\mathbb{F}_2)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Also gilt für die kanonische Abbildung:

$$U(M_2(\mathbb{Z})) \rightarrow U(M_2(\mathbb{F}_2))$$

ist surjektiv. Da $\mathbb{F}_2[D_2]$ lokal ist, folgt mit 5.3 die Behauptung aus 2.5.

5.4 Satz (Martinet) ([5] Seite 402) :

D_8 sei die Diedergruppe der Ordnung 8. Jeder projektive $\mathbb{Z}[D_8]$ -Modul vom Rang 1 ist dann frei.

Beweis : Nach Satz 3.9 ist das Quadrat von kanonischen Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[D_8] & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}[D_4] \\ | & & | \\ \Gamma_4 & \twoheadrightarrow & \mathbb{F}_2[D_4] \\ & & \mathbb{E}_1 \end{array} \quad \mathbb{E}_2$$

ein Faserprodukt diagramm, wobei $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ surjektiv sind und

$$D_8 := \mathbb{G}(a', b' \mid a'^4 = e, a'^4 = b'^2 = e, b'a'b'^{-1} = a'^{-1})$$

$$D_4 := \mathbb{G}(a, b \mid a^2 = e, a^2 = b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1})$$

sind. Seien $\bar{a}' := a + (e + a'^2), \bar{b}' := b + (e + a'^2)$ in $\Gamma_4 = \mathbb{Z}[D_8]/(e + a'^2)$.

Nach 2.6 ist

$$U(\mathbb{F}_2[D_4]) = \{e, a, b, ab, e+a+b, e+a+ab, e+b+ab, a+b+ab\}.$$

Die Gruppenelemente $\{e, a, b, ab\}$ haben Urbilder in $U(\Gamma_4)$ (sogar in $U(\mathbb{Z}[D_8])$).

Bei dem Isomorphismus $\Gamma_4 \cong \mathbb{M}$ nach 4.3 wird

$\{e + \bar{a}' + \bar{b}', e + \bar{a}' + \bar{a}'\bar{b}', e + \bar{b}' + \bar{a}'\bar{b}', \bar{a}' + \bar{b}' + \bar{a}'\bar{b}'\}$ auf

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

in $U(\mathbb{M})$ abgebildet. Also ist $U(\Gamma_4) \rightarrow U(\mathbb{F}_2[D_4])$ surjektiv.

Wegen 4.3, 5.3 ist jeder projektive Γ_4 -Modul vom Rang 1 frei.

Nach 5.1 ist jeder projektive $\mathbb{Z}[D_4]$ -Modul vom Rang 1 frei.

Also ist nach 2.4(2) jeder projektive $\mathbb{Z}[D_8]$ -Modul frei.

§6. Die Einheiten in Λ

6.1 Proposition :

Sei $Q_{16} = \mathbb{Q}(x, y \mid x^8 = e, x^4 = y^2, yxy^{-1} = x^{-1})$ die Quaternionengruppe der Ordnung 16. Die $\mathbb{Q}$ -Algebra $\mathbb{Q}[Q_{16}]/(e+y^2)$ hat dann Dimension 8 mit $\mathbb{Q}$ -Basis

$\{e, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, j, \zeta j, \zeta^2 j, \zeta^3 j\}$, wobei $e = \text{Einselement}$, $\zeta := x + (e+y^2)$, $j := y + (e+y^2)$ sind. Es gilt folgende Multiplikationstafel:

	e	ζ	ζ^2	ζ^3	j	ζj	$\zeta^2 j$	$\zeta^3 j$
e	e	ζ	ζ^2	ζ^3	j	ζj	$\zeta^2 j$	$\zeta^3 j$
ζ	ζ	ζ^2	ζ^3	-e	ζj	$\zeta^2 j$	$\zeta^3 j$	-j
ζ^2	ζ^2	ζ^3	-e	-\zeta	$\zeta^2 j$	$\zeta^3 j$	-j	-\zeta j
ζ^3	ζ^3	-e	-\zeta	-\zeta^2	$\zeta^3 j$	-j	-\zeta j	-\zeta^2 j
j	j	-\zeta^3 j	-\zeta^2 j	-\zeta j	-e	ζ^3	ζ^2	ζ
ζj	ζj	j	-\zeta^3 j	-\zeta^2 j	-\zeta	-e	ζ^3	ζ^2
$\zeta^2 j$	$\zeta^2 j$	ζj	j	-\zeta^3 j	-\zeta^2	-\zeta	-e	ζ^3
$\zeta^3 j$	$\zeta^3 j$	$\zeta^2 j$	ζj	j	-\zeta^3	-\zeta^2	-\zeta	-e

Beweis : 3.7

6.2 Proposition :

Auf der $\mathbb{Q}$ -Algebra $\mathbb{Q}[Q_{16}]/(e+y^2)$ induziert die Abbildung $\tau : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Q}[\zeta + \zeta^{-1}]$ $r + s\sqrt{2} \mapsto r + s(\zeta + \zeta^{-1})$ ($r, s \in \mathbb{Q}$) eine $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -Algebrastruktur.

Beweis : Wegen

$$(\zeta + \zeta^{-1})^2 = \zeta^2 + \zeta^{-2} + 2e = \zeta^2 - \zeta^2 + 2e = 2e$$

ist klar, dass die Abbildung τ $\mathbb{Q}$ -Algebraisomorphismus ist. Noch zu zeigen ist, dass $\mathbb{Q}[\zeta + \zeta^{-1}]$ in dem Zentrum des Rings $\mathbb{Q}[Q_{16}]/(e+y^2)$ enthalten ist. Aber das ist klar, da $\zeta j = j \zeta^{-1}$ ist.

6.3 Bezeichnung :

Die von τ induzierte $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -Algebra $\mathbb{Q}[Q_{16}]/(e+y^2)$ bezeichnen wir von jetzt ab mit A . In A gilt $\sqrt{2}e = \zeta + \zeta^{-1}$.

6.4 Proposition :

Sei $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[i, j]$ die übliche Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit Basis $e, i, j, k := ij$ und $i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji$. Dann ist

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})[i, j] \rightarrow A, \quad i \mapsto \zeta^2, \quad j \mapsto j, \quad \sqrt{2}e \mapsto \zeta + \zeta^{-1}$$

ein $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -Algebraisomorphismus. Insbesondere ist A eine zentrale einfache Algebra.

Beweis :

Wegen $\zeta = \frac{1}{2}(\zeta - \zeta^3)(\zeta^2 + e) = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1})(\zeta^2 + e)$, ist

$$\zeta \in \mathbb{Q}[\zeta + \zeta^{-1}][\zeta^2, j] = \mathbb{Q}(\sqrt{2})[\zeta^2, j].$$

Daher ist

$$(1) \quad A = \mathbb{Q}[\zeta, j] = \mathbb{Q}(\sqrt{2})[\zeta^2, j].$$

Ferner ist klar, dass

$$(2) \quad (\zeta^2)^2 = j^2 = (\zeta^2 j)^2 = -e \quad \text{und} \quad j\zeta^2 = -\zeta^2 j$$

gilt. Wegen (1), (2) folgt die Behauptung aus [7], 57.3.

6.5 Proposition :

Der Ring $\Lambda_8 = \mathbb{Z}[Q_{16}]/(e+y^2)$ ist kanonisch isomorph zu dem Unterring

$$\Lambda := \{r_0 e + r_1 \zeta + r_2 \zeta^2 + r_3 \zeta^3 + r_4 j + r_5 \zeta j + r_6 \zeta^2 j + r_7 \zeta^3 j \in A \mid r_0, \dots, r_n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}[\zeta, j]$$

von $A = \mathbb{Q}[Q_{16}]/(e+y^2)$. Ferner ist $\Lambda = \mathbb{Z}[\zeta, j] = \mathbb{Z}[\sqrt{2}][\zeta, j]$.

Λ ist insbesondere eine $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ -Ordnung in der $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ -Quaternionenalgebra A .

Beweis : Da $\sqrt{2} e = \zeta + \zeta^{-1} = \zeta - \zeta^3 \in \mathbb{Z}[\zeta, j] = \Lambda$, ist

$\Lambda = \mathbb{Z}[\sqrt{2}][\zeta, j]$. Nun ist offenbar Λ eine $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ -Ordnung in der $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -Algebra A . Der Rest der Behauptung gilt nach 3.7.

6.6 Bezeichnung :

Von jetzt ab identifizieren wir den Ring $\Lambda_8 = \mathbb{Z}[Q_{16}]/(e+y^2)$ mit dem Unterring Λ von $A = \mathbb{Q}[Q_{16}]/(e+y^2)$.

6.7 Proposition :

Sei $w \in \Lambda$. Dann ist nach 6.5

$$w = r_0 e + r_1 \zeta + r_2 \zeta^2 + \dots + r_7 \zeta^3 j$$

für gewisse $r_0, \dots, r_7 \in \mathbb{Z}$. Für jedes $w \in \Lambda$ gilt:

- (1) w hat als ein Element der üblichen Quaternionen $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ -Algebra A eine eindeutige Darstellung der Form:

$$w = (r_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 - r_3))e + (r_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 + r_3))\zeta^2 + (r_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_5 - r_7))j + (r_6 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_5 + r_7))\zeta^2 j .$$

- (2) Das konjugierte Element $\bar{w}$ von w in der Quaternionenalgebra A hat in Λ die Form:

$$\bar{w} = r_0 e - r_3 \zeta - r_2 \zeta^2 - r_1 \zeta^3 - r_4 j - r_5 \zeta j - r_6 \zeta^2 j - r_7 \zeta^3 j .$$

- (3) Die Norm $N(w) = w\bar{w}$ von w in der Quaternionenalgebra A hat die Form:

$$N(x) = N_1(x) + \sqrt{2} (N_2(x) + N_3(x)) \quad \text{mit} \quad N_1(x) = \sum_{i=0}^7 r_i^2, \\$$

$$N_2(x) = r_0(r_1 - r_3) + r_2(r_1 + r_3), \quad N_3(x) = r_4(r_5 - r_7) + r_6(r_5 + r_7).$$

Beweis : Nach 6.2 ist $\sqrt{2} e = \zeta + \zeta^{-1} = \zeta - \zeta^3$. Daher ist $\sqrt{2} \zeta = \zeta^2 - \zeta^4 = \zeta^2 + e$. Also ist $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^2 + e)$.

Wegen $w = r_0 e + r_2 \zeta^2 + r_4 j + r_6 \zeta^2 j + \zeta(r_1 e + r_3 \zeta^2 + r_5 j + r_7 \zeta^2 j)$ ist

$$\begin{aligned} w &= r_0 e + r_2 \zeta^2 + r_4 j + r_6 \zeta^2 j + \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^2 + e)(r_1 e + r_3 \zeta^2 + r_5 j + r_7 \zeta^2 j) \\ &= (r_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 - r_3))e + (r_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 + r_3))\zeta^2 \\ &\quad + (r_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_5 - r_7))j + (r_6 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_5 + r_7))\zeta^2 j. \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit der oben angegebenen Form von w in A ist klar. Da das konjugierte Element $\bar{w}$ von w in A folgende Form hat:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= (r_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 - r_3))e - (r_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 + r_3))\zeta^2 - (r_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_5 - r_7))j - \\ &\quad - (r_6 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_5 + r_7))\zeta^2 j \\ &= (r_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-r_3 - (-r_1)))e + (-r_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-r_3 + (-r_1)))\zeta^2 \\ &\quad + (-r_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-r_5 - (-r_7)))j + (-r_6 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-r_5 + (-r_7)))\zeta^2 j, \end{aligned}$$

hat $\bar{w}$ nach der Eindeutigkeit der Form von $\bar{w}$ in A die in (2) angegebene Form.

Die Behauptung (3) folgt durch einfache Rechnungen (1), da

$$N(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad \text{in} \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2})[i, j] \quad \text{gilt.}$$

6.8 Proposition :

Sei $u = u_1 + u_2 j \in \Lambda$, $u_1 := r_0 e + r_1 \zeta + r_2 \zeta^2 + r_3 \zeta^3$,
 $u_2 := r_4 e + r_5 \zeta + r_6 \zeta^2 + r_7 \zeta^3$. Für $N(u) = (1 + \sqrt{2})^{\pm 2}$ folgt

(1) $u_1 = 0$ und es gibt k , $4 \leq k \leq 7$ mit $r_k = 0$, $r_1 = \pm 1$ für
 $4 \leq l \leq 7$, $l \neq k$

oder

(2) $u_2 = 0$ und es gibt k , $0 \leq k \leq 3$ mit $r_k = 0$, $r_1 = \pm 1$ für
 $0 \leq l \leq 3$, $l \neq k$.

Beweis : Wegen $(1 + \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2}) = 1$ ist $(1 + \sqrt{2})^{\pm 2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Für $N(u) = (1 + \sqrt{2})^{\pm 2}$ folgt also:

$$N_1(u) = 3, N_2(u) + N_3(u) = \pm 2.$$

Wegen $3 = N_1(u) = \sum_1 r_1^2$ sind genau 3 der r_1 gleich ± 1 , die

übrigen sind 0.

Zu zeigen ist: Der Fall $r_1 = \pm 1$, $r_m = \pm 1$, $0 \leq l \leq 3$, $4 \leq m \leq 7$ kann nicht eintreten.

Annahme: Es gibt l, m , $0 \leq l \leq 3$, $4 \leq m \leq 7$ mit $r_l, r_m = \pm 1$. Dann gibt es genau ein weiteres n , $n \neq l, m$ mit $r_n = \pm 1$. Ohne Einschränkung sei $0 \leq n \leq 3$ (der Fall $4 \leq n \leq 7$ verläuft analog).

Dann gilt:

$N_3(x) = 0$ nach Definition von $N_3(x)$. Da r_l, r_n genau einmal in $N_2(x)$ vorkommt, ist $N_2(x) = \pm 1$ im Widerspruch zu
 $N_2(x) + N_3(x) = \pm 2$.

6.9 Bezeichnungen :

$U_2(\Lambda)$ bezeichne die Menge

$$\{u \in \Lambda \mid N(u) = (1+\sqrt{2})^i \text{ für ein } i \in \{2, -2\}\}.$$

Wir halten diese Bezeichnung von jetzt ab fest.

6.10 Lemma :

Jede Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ hat die Form $\pm(1+\sqrt{2})^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis : [9] Seite 133.

6.11 Satz :

$$(1) \quad U(\Lambda) = \{u \in \Lambda \mid N(u) = (1+\sqrt{2})^{2m} \text{ für ein } m \in \mathbb{Z}\}$$

(2) $U_2(\Lambda)$ (siehe 6.9) ist ein Erzeugendensystem der Einheitsgruppe $U(\Lambda)$.

Beweis : (1) Sei u eine Einheit in Λ . Nach 6.7(3) ist dann $N(u) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Ebenso ist $N(u^{-1}) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Wegen $N(u)N(u^{-1}) = 1$ ist also $N(u) \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$. Nach 6.10 ist $N(u) = \pm(1+\sqrt{2})^m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Wegen $N_1(u) \geq 0$ ist nur der Fall $N(u) = (1+\sqrt{2})^m$ möglich.

Annahme: $m = 2l+1$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. Dann ist $N(uw^1) =$

$$N(u)N(w)^1 = 1+\sqrt{2} \text{ für } w = e-\zeta+\zeta^2, \text{ da } N(w) = 3-2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{-2}$$

nach 6.7(3) gilt.

Nach 6.7(3) ist aber $N(x) = 1 + \sqrt{2}$ für $x \in \Lambda$ unmöglich.

Also ist m gerade.

Umgekehrt ist wegen $N(x) = x\bar{x}$ klar, dass jedes $u \in \Lambda$ mit $N(u) \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ Einheit in Λ ist.

(2) Es ist klar, dass $U_2(\Lambda) \subset U(\Lambda)$ ist. Sei $u \in U(\Lambda)$. Dann ist $N(u) = (1 + \sqrt{2})^{2n}$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ nach (1). Setze

$w := e - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Wegen $N(w) = (1 + \sqrt{2})^{-2}$ folgt

$N(uw^{n-1}) = N(u)N(w)^{n-1} = (1 + \sqrt{2})^2$, also $uw^{n-1} \in U_2(\Lambda)$, $u \in \langle U_2(\Lambda) \rangle$.

§7. Projektive Λ -Moduln vom Rang 1

Wie in §6 ist $\Lambda = \mathbb{Z}[\sqrt{2}][i, j]$ in $A = \mathbb{Q}(\sqrt{2})[i, j]$, $i = \zeta^2$.

Nach 6.4 ist $\Lambda = \mathbb{Z}[\sqrt{2}][\frac{1}{2}\sqrt{2}(e+i), j]$.

7.1 Satz (Krimse) :

In $A = \mathbb{Q}(\sqrt{2})[i, j]$ ist

$$\Sigma := \mathbb{Z}[\sqrt{2}][\frac{1}{2}\sqrt{2}(e+i), \frac{1}{2}\sqrt{2}(e+j), \frac{1}{2}(e+i+j+k)]$$

eine $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ -Maximalordnung, wobei alle Linksideale Hauptideale sind.

Beweis : [4] §2, [8] §9.

7.2 Proposition :

(1) Jeder projektive Σ -Modul vom Rang 1 ist frei.

(2) $\Lambda \subset \Sigma$

(3) $\{e, t_1 := \frac{\sqrt{2}}{2}(e+i), t_2 := \frac{\sqrt{2}}{2}(e+j), \rho := \frac{1}{2}(e+i+j+k)\}$
ist eine $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ -Basis von Σ .

Beweis : (1) Sei P ein projektiver Σ -Modul vom Rang 1. Nach

2.3 ist dann P isomorph zu einem Linksideal $0 \neq P'$ in Σ .

Nach 7.1 ist P' Hauptideal. Da Σ in dem Schiefkörper

$A = \mathbb{Q}(\sqrt{2})[i, j]$ enthalten ist, folgt $P \cong P' \cong \Sigma$.

(2) $\Lambda = \mathbb{Z}[\sqrt{2}][\frac{\sqrt{2}}{2}(e+i), j] \subset \Sigma$, da $j = \sqrt{2}t_2 - e \in \Sigma$ ist.

(3) $\{e, i, j, k\}$ ist eine $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -Basis von $A = \mathbb{Q}(\sqrt{2})[i, j] \supset \Sigma$.

Da $i = \sqrt{2}t_1 - e$, $j = \sqrt{2}t_2 - e$, $k = 2\rho - (\sqrt{2}t_1 + \sqrt{2}t_2 - e)$ sind, ist $\{e, t_1, t_2, \rho\}$ auch eine $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -Basis von A . Daher ist $\{u, t_1, t_2, \rho\}$ eine $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ -linear unabhängige Menge in $\Sigma \subset A$. Da nach der folgenden Multiplikationstabelle $\{e, t_1, t_2, \rho\}$ ein $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ -Erzeugendensystem von Σ ist, gilt die Behauptung (3). In Σ gilt:

	t_1	t_2	ρ
t_1	$-e + \sqrt{2}t_1$	ρ	$-t_2 + \sqrt{2}\rho$
t_2	$-e + \sqrt{2}t_1 + \sqrt{2}t_2 - \rho$	$-e + \sqrt{2}t_2$	$-\sqrt{2}e + t_1 + t_2$
ρ	$-\sqrt{2}e + t_1 + t_2$	$-t_1 + \sqrt{2}\rho$	$-e + \rho$

7.3 Proposition :

- (1) $\sqrt{2}\Sigma$ ist zweiseitiges Ideal in Σ , das in Λ enthalten ist.
- (2) $\Sigma/\sqrt{2}\Sigma = \mathbb{Z}[\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{\rho}] = \mathbb{F}_2[\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{\rho}]$, wobei $\bar{t}_i := t_i + \sqrt{2}\Sigma$ ($i=1,2$), $\bar{\rho} := \rho + \sqrt{2}\Sigma$ gilt, und wobei $\Sigma/\sqrt{2}\Sigma$ durch die natürliche $\mathbb{Z}$ -Struktur $\mathbb{F}_2$ -Modul ist. Ferner ist $\{e, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{\rho}\}$ eine $\mathbb{F}_2$ -Basis von $\Sigma/\sqrt{2}\Sigma$.
- (3) $\Lambda/\sqrt{2}\Sigma = \mathbb{F}_2[\bar{t}_1] \cong \mathbb{F}_2[D_2]$. $\Lambda/\sqrt{2}\Sigma$ ist insbesondere ein lokaler Ring.

Beweis : (1) Offenbar genügt es zu zeigen, dass $\sqrt{2}\rho \in \Lambda$ gilt. Wegen $(\zeta + \zeta^{-1})^2 (e + \zeta^2 + j + \zeta^2 j) = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^3 + \zeta j + \zeta^3 j - \zeta^3 - \zeta - \zeta^3 j + \zeta j) = \zeta + \zeta j \in \mathbb{Z}[\zeta, j]$ folgt $\sqrt{2}\rho \in \Lambda$.

(2) Wegen $2\Sigma = \sqrt{2}\sqrt{2}\Sigma \subset \sqrt{2}\Sigma$ ist $\Sigma/\sqrt{2}\Sigma$ auf natürliche Weise $\mathbb{F}_2$ -Modul. Offenbar gilt $\Sigma/\sqrt{2}\Sigma = \mathbb{Z}[\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{\rho}]$.

Wegen $\Sigma \cong (\mathbb{Z}[\sqrt{2}])^4$ nach 7.2(3) ist

$\Sigma/\sqrt{2}\Sigma \cong (\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/\sqrt{2}\mathbb{Z}[\sqrt{2}])^4$. Da $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/\sqrt{2}\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cong \mathbb{F}_2$, ist $\Sigma/\sqrt{2}\Sigma \cong \mathbb{F}_2^4$. Daraus folgt:

$\{e, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{\rho}\}$ ist eine $\mathbb{F}_2$ -Basis von $\Sigma/\sqrt{2}\Sigma$.

(3) Wegen $\Lambda = \mathbb{Z}[\sqrt{2}][t_1, j]$ und $\sqrt{2}t_2 = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(e+j) = e+j \in \sqrt{2}\Sigma$ folgt $\Lambda/\sqrt{2}\Sigma = \mathbb{Z}[\bar{t}_1]$. Ausserdem ist

$$t_1^2 = \frac{1}{2}(e+1)^2 = \frac{1}{2}(e^2+2e-e) = 1,$$

$$\sqrt{2}t_1 = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(e+1) = e+1 \in \sqrt{2}\Sigma.$$

Daraus folgt $\mathbb{F}_2[\bar{t}_1] \cong \mathbb{F}_2[D_2]$. $\mathbb{F}_2[D_2]$ ist nach 2.6 lokal.

Daher ist $\Lambda/\sqrt{2}\Sigma$ ein lokaler Ring.

7.4 Proposition :

Sei $f: \Sigma \rightarrow \Sigma/\sqrt{2}\Sigma$ der kanonische Ringhomomorphismus. Dann gilt

$$f(U(\Sigma)) = U(\Sigma/\sqrt{2}\Sigma).$$

Beweis : Wegen 7.3(2) ist offenbar

$$|\Sigma/\sqrt{2}\Sigma| =$$

$$|\{0, e, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{\rho}, e+\bar{t}_1, e+\bar{t}_2, e+\bar{\rho}, \bar{t}_1+\bar{t}_2, \bar{t}_1+\bar{\rho}, \bar{t}_2+\bar{\rho}, e+\bar{t}_1+\bar{t}_2, e+\bar{t}_1+\bar{\rho}, e+\bar{t}_2+\bar{\rho}, \bar{t}_1+\bar{t}_2+\bar{\rho}, e+\bar{t}_1+\bar{t}_2+\bar{\rho}\}| = 16.$$

Ferner gilt in $\Sigma/\sqrt{2}\Sigma$:

$$e \cdot e = e, \bar{t}_1^2 = e, \bar{t}_2^2 = e, \bar{\rho}(e+\bar{\rho}) = e, (\bar{t}_1+\bar{t}_2)^2 = e, (e+\bar{t}_1)^2 = 0,$$

$$(e+\bar{t}_2)^2 = 0, (\bar{t}_1+\bar{\rho})^2 = \bar{t}_1+\bar{\rho}, (\bar{t}_2+\bar{\rho})^2 = \bar{t}_2+\bar{\rho}, (e+\bar{t}_1+\bar{t}_2)^2 = 0,$$

$$(e+\bar{t}_1+\bar{\rho})^2 = e+\bar{t}_1+\bar{\rho}, (e+\bar{t}_2+\bar{\rho})^2 = e+\bar{t}_2+\bar{\rho}, (\bar{t}_1+\bar{t}_2+\bar{\rho})^2 = \bar{t}_1+\bar{t}_2+\bar{\rho},$$

$$(e+\bar{t}_1+\bar{t}_2+\bar{\rho})^2 = e+\bar{t}_1+\bar{t}_2+\bar{\rho}.$$

Da ein idempotentes Element $\neq 0$, e Nullteiler ist, folgt

$$U(\Sigma/\sqrt{2}) = \{e, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{\rho}, e+\bar{\rho}, \bar{t}_1+\bar{t}_2\}.$$

Aus der Multiplikationstafel in 7.2 folgt:

$$t_1(\sqrt{2}e-t_1) = e, \quad t_2(\sqrt{2}e-t_2) = e, \quad \rho(e-\rho) = e, \quad (-\sqrt{2}e+t_1-t_2)(\sqrt{2}e-t_1-t_2) \\ = -(\sqrt{2}e-t_1-t_2)^2 =$$

$$= -(2e-\sqrt{2}t_1-\sqrt{2}t_2-\sqrt{2}t_1-e+\sqrt{2}t_1+\rho-\sqrt{2}t_2-e+\sqrt{2}t_1+\sqrt{2}t_2-\rho-e+\sqrt{2}t_2) = e.$$

Aus diesen Gleichungen ist es klar, dass $t_1, t_2, \sqrt{2}e-t_1-t_2$ zweiseitig invertierbar sind und dass $f(U(\Sigma)) = U(\Sigma/\sqrt{2}\Sigma)$ gilt.

7.5 Satz :

Jeder projektive Λ -Modul vom Rang 1 ist frei.

Beweis : Nach 1.11, 7.3(3) ist folgendes Quadrat von kanonischen Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \rightarrow & \Sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda/\sqrt{2}\Sigma & \rightarrow & \Sigma/\sqrt{2}\Sigma \end{array}$$

ein Faserprodukt diagramm von zwei surjektiven Ringhomomorphismen.

Wegen 7.4, 7.3 folgt dann aus 2.5 die Behauptung.

§8. Projektive $\mathbb{Z}[\mathbb{Q}_6]$ -Moduln vom Rang 1

8.1 Proposition :

Sei $j_1: \Lambda \rightarrow \mathbb{F}_2[D_8]$ der kanonische Ringhomomorphismus mit

$j_1(\xi) = a$, $j_1(j) = b$ (siehe 3.9). Dann gilt mit

$$U_1(\Lambda) = \{e, \xi, \xi^2, \xi^3, j, \xi j, \xi^2 j, \xi^3 j\},$$

$j_1(U(\Lambda)) = j_1(U_1(\Lambda) \cup U_2(\Lambda))$ (siehe 6.11(2))

$$= \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b, e+a+a^2, e+a+a^3, e+a^2+a^3, a+a^2+a^3, b+ab+a^2b, \\ b+ab+a^3b, b+a^2b+a^3b, ab+a^2b+a^3b\}.$$

Beweis : Wegen 6.8 ist

$$j_1(U_2(\Lambda)) = \{e+a+a^2, e+a+a^3, e+a^2+a^3, a+a^2+a^3, b+ab+a^2b, b+ab+a^3b, \\ b+a^2b+a^3b, ab+a^2b+a^3b\}.$$

Wegen 6.11 genügt es zu zeigen, dass $j_1(U_1(\Lambda) \cup U_2(\Lambda))$ eine Gruppe ist. Setze

$$u_1 := e+a+a^2, u_2 := e+a+a^3, u_3 := e+a^2+a^3, u_4 := a+a^2+a^3, \\ u_5 := b+ab+a^2b, u_6 := b+ab+a^3b, u_7 := b+a^2b+a^3b, u_8 := ab+a^2b+a^3b.$$

Dann ist $u_2^2 = e$. Ferner haben wir

$$au_2 = u_2a = u_1, a^2u_2 = u_2a^2 = u_4, a^3u_2 = u_2a^3 = u_3, \\ bu_2 = u_2b = u_6, abu_2 = u_2ab = u_5, a^2bu_2 = u_2a^2b = u_8, \\ a^3bu_2 = u_2a^3b = u_7.$$

Daraus folgt $j_1(U_1(\Lambda) \cup U_2(\Lambda))$ ist eine Gruppe mit

$$j_1(U_1(\Lambda) \cup U_2(\Lambda)) \cong D_8 \times \langle U_2 \rangle.$$

8.2 Lemma :

Seien

$$L := \{ \frac{1}{2}(1+l_0), \bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3 \} \in \mathbb{F}_2^4 \mid l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z} \text{ mit} \\ l_0^2 - 4(l_2^2 + l_3^2 - l_1^2) = 1 \}$$

$$N := \{ (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}), \\ (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}) \}.$$

Dann ist $L = N$.

Beweis : Wegen

$$N = \{ (\overline{\frac{1}{2}(1+7)}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{4}), (\overline{\frac{1}{2}(1+7)}, \bar{5}, \bar{1}, \bar{6}), (\overline{\frac{1}{2}(1+7)}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}), (\overline{\frac{1}{2}(1+3)}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}), \\ (\overline{\frac{1}{2}(1+1)}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\overline{\frac{1}{2}(1+1)}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\overline{\frac{1}{2}(1+1)}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}), (\overline{\frac{1}{2}(1+5)}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{3}) \}$$

gilt $L \supset N$.

Seien $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}$ mit $l_0^2 - 4(l_2^2 + l_3^2 - l_1^2) = 1$. Dann ist

$l_0 = 2n+1$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, also $n^2 + n - l_2^2 - l_3^2 + l_1^2 = 0$.

In $\mathbb{F}_2$ gilt wegen $x^2 = x$, $x \in \mathbb{F}_2$: $\bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_1 = 0$.

Also ist

$$(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3) \in \{ (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}) \}.$$

Daraus folgt $L \subset N$.

8.3 Proposition :

$j_2: \mathbb{Z}[D_8] \rightarrow \mathbb{F}_2[D_8]$ sei der kanonische Ringhomomorphismus.

Dann gilt:

$j_2(U(\mathbb{Z}[D_8]))$

$$= \{a^2, a+a^2+a^3+b+a^2b, a+a^2+a^3+ab+a^3b, a^2+b+ab+a^2b+a^3b, \\ e, e+a+a^3+b+a^2b, e+a+a^3+ab+a^3b, e+b+ab+a^2b+a^3b, \\ a^3, e+a^2+a^3+b+a^2b, e+a^2+a^3+ab+a^3b, a^3+b+ab+a^2b+a^3b, \\ a, e+a+a^2+b+a^2b, e+a+a^2+ab+a^3b, a+b+ab+a^2b+a^3b, \\ a^2b, e+a^2+ab+a^2b+a^3b, a+a^3+ab+a^2b+a^3b, e+a+a^2+a^3+a^2b, \\ b, e+a^2+b+ab+a^3b, a+a^3+b+ab+a^3b, e+a+a^2+a^3+b, \\ a^3b, e+a^2+b+a^2b+a^3b, a+a^3+b+a^2b+a^3b, e+a+a^2+a^3+a^3b, \\ ab, e+a^2+b+ab+a^2b, a+a^3+b+a^2b+a^2b, e+a+a^2+a^3+ab\}.$$

Beweis : Aus 4.6 und 8.2 folgt die Behauptung.

8.4 Lemma :

R sei ein Integritätsring mit Quotientenkörper K .

$S \rightarrow S_2$ sei ein Faserprodukt diagramm
 $\downarrow \quad \downarrow$ von R -Algebren. Ferner sei
 $S_1 \rightarrow S'$ $K \otimes_R S' = 0$. Sei $P \in P(S)$ mit
 $S_1 \otimes_S P \cong S_1 \quad (i=1,2).$

Dann ist $K \otimes_R P \cong K \otimes_R S$ als $K \otimes_R S$ - Moduln.

Beweis : Lokalisierung eines Faserprodukt diagramms von R -Algebren ist wieder ein Faserprodukt diagramm, da Lokalisierung die Exaktheit erhält. Da $K \otimes_R S' = 0$, ist $K \otimes_R S \cong (K \otimes_R S_1) \times (K \otimes_R S_2)$.

Wegen $S_1 \otimes_S P \cong S_1 \quad (i=1,2)$ gilt :

$$(K \otimes_R S_i) \otimes_{K \otimes_R S} (K \otimes_R P) \cong K \otimes_R S_i \quad (i=1,2). \text{ Daher gilt}$$

$$K \otimes_R P \cong (K \otimes_R S_1) \times (K \otimes_R S_2) \cong K \otimes_R S.$$

8.5 Satz :

Es gibt genau zwei Isomorphieklassen von projektiven $\mathbb{Z}[Q_{16}]$ -Moduln vom Rang 1.

Beweis : Nach 3.9 ist das Quadrat von kanonischen Ring-homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[Q_{16}] & \xrightarrow{j_2} & \mathbb{Z}[D_8] \\ i_1 \downarrow & & \downarrow j_2 \\ \Lambda & \xrightarrow{j_1} & \mathbb{F}_2[D_8] \end{array}$$

ein Faserprodukt diagramm, wobei j_1, j_2 surjektiv sind. Wegen 5.4, 7.6 gibt es für jeden projektiven $\mathbb{Z}[Q_{16}]$ -Modul P vom Rang 1 ein $u \in U(\mathbb{F}_2[D_8])$ mit

$$P \cong M(\Lambda, \pi_2^{-1} \hat{u} \pi_1, \mathbb{Z}[D_8])$$

nach 2.4(1). Für ein $u \in U(\mathbb{F}_2[D_8])$ bezeichne P_u den projektiven $\mathbb{Z}[Q_{16}]$ -Modul $M(\Lambda, \pi_2^{-1} \hat{u} \pi_1, \mathbb{Z}[D_8])$. Nach 2.6 gilt offenbar $|U(\mathbb{F}_2[D_8])| = 128$. Nach 8.3 ist $|j_2(U(\mathbb{Z}[D_8]))| = 32$. Daher hat $j_2(U(\mathbb{Z}[D_8]))$ den Index 4 in $U(\mathbb{F}_2[D_8])$. Es gilt in $U(\mathbb{F}_2[D_8])$ mit $s_1 := e+ab$, $s_2 := e+aa^2$, $s_3 := e+aa^2+b+ab$:

$\{s_1, s_2, s_3, s_1^{-1}s_2, s_1^{-1}s_3, s_3^{-1}s_2\} \cap j_2(U(\mathbb{Z}[D_8])) = \emptyset$, da
 $s_1^{-1} = a+a^2+b+ab+a^3b$, $s_2^{-1} = e+a^2+a^3$, $s_3^{-1} = a^3+a^2b+a^3b$,
 $s_1^{-1}s_2 = e+aa^3b$, $s_1^{-1}s_3 = e+a^2+ab$, $s_3^{-1}s_2 = e+aa^3+b+aa^3b$ in $\mathbb{F}_2[D_8]$
sind.

Also gilt mit $s_0 = e$:

$s_1 j_2(U(\mathbb{Z}[D_8])) \cap s_k j_2(U(\mathbb{Z}[D_8])) = \emptyset$, $i \neq k$, $0 \leq i, k \leq 3$. Daraus folgt, dass $\{e, s_1, s_2, s_3\}$ ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von $j_2(U(\mathbb{Z}[D_8]))$ in $U(\mathbb{F}_2[D_8])$ ist. Nach 1.8 ist jeder Modul P_u , $u \in U(\mathbb{F}_2[D_8])$, isomorph zu P_e, P_{s_1}, P_{s_2} oder P_{s_3} . Wegen $s_2 = j_1(e + \zeta + \zeta^2)$, ist $P_{s_2} \cong P_e$ nach 1.8.

Wegen $s_3^{-1} j_1(e + \zeta + \zeta^2) s_1 = e + a^2 + ab + a^2 b + a^3 b \in j_2(U(\mathbb{Z}[D_8]))$, ist $P_{s_3} \cong P_{s_1}$ nach 1.8. Nach 8.3 gilt:

$$\begin{aligned} & j_1(U(\Lambda)) s_1 \cap j_2(U(\mathbb{Z}[D_8])) \\ &= \{e(e+a+b), a(e+a+b), a^2(e+a+b), a^3(e+a+b), b(e+a+b), ab(e+a+b), \\ & \quad a^2 b(e+a+b), a^3 b(e+a+b), \\ & \quad (e+a+a^2)(e+a+b) = e+a^3+b+ab+a^2 b, \\ & \quad (e+a+a^3)(e+a+b) = a^2+a^3+b+ab+a^3 b, \\ & \quad (e+a^2+a^3)(e+a+b) = a+a^2+b+a^2 b+a^3 b, \\ & \quad (a+a^2+a^3)(e+a+b) = e+a+ab+a^2 b+a^3 b, \\ & \quad (b+ab+a^2 b)(e+a+b) = e+a+a^2+a^2 b+a^3 b, \\ & \quad (b+ab+a^3 b)(e+a+b) = e+a+a^3+ab+a^2 b, \\ & \quad (b+a^2 b+a^3 b)(e+a+b) = e+a^2+a^3+b+ab, \\ & \quad (ab+a^2 b+a^3 b)(e+a+b) = a+a^2+a^3+b+a^3 b\} \cap j_2(U(\mathbb{Z}[D_8])) = \emptyset. \end{aligned}$$

Daraus folgt $P_{s_1} \not\cong P_e$ nach 1.8.

Noch zu zeigen ist, dass für jedes $u \in U(\mathbb{F}_2[D_8])$ P_u den Rang 1 hat. Wegen $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}[Q_{16}]} P_u \cong \Lambda$, $\mathbb{Z}[D_8] \otimes_{\mathbb{Z}[Q_{16}]} P_u \cong \mathbb{Z}[D_8]$ nach 1.4(c), und wegen $Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_2[D_8] = 0$, hat P_u den Rang 1 nach 8.4.

Also bilden die Moduln P_e und P_{e+a+b} ein vollständiges Repräsentantensystem der Isomorphieklassen der projektiven $\mathbb{Z}[Q_{16}]$ -Moduln vom Rang 1.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Bass, Algebraic K-Theory, Benjamin, NewYork, 1968.
- [2] G. Higman, The Units of Group-Rings, Proc. Lond. Math. Soc. 46, 1940, 231-248.
- [3] J. Krimse, Zur Darstellung totalpositiver Zahlen als Summen von vier Quadraten, Math. Zeitschrift 21, 1924, 195-202.
- [4] J. Lambek, Lectures on Rings and Modules, Blaisdell 1966.
- [5] J. Martinet, Modules sur l'algebre du groupe quaternionien, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4, 1971, 399-408.
- [6] J. Milnor, Introduction to Algebraic K-Theory, Annals of Mathematical Studies No. 72, Princeton University Press NJ 1971.
- [7] O. T. O'Mera, Introduction to the Theory of Quadratic Forms, Springer, Berlin 1963.
- [8] M. Peters, Ternäre und quaternäre quadratische Formen, Acta Arithmetica XV, 1969, 329-365.

- [9] P. Ribenboim, Algebraic Numbers, Wiley-Interscience
NewYork, 1972.
- [10] E. Schenkman, Group Theory, D. Van Nostrand Co., NJ 1965.
- [11] R. G. Swan, Induced Representations and Projective Modules,
Ann. of Math., 71, 1960, 552-557.
- [12] R. G. Swan, Projective Modules over Group Rings and
Maximal Orders, Ann. of Math., 76, 1962, 55-61.
- [13] R. G. Swan, K-Theory of Finite Groups and Orders, Lecture
Notes in Math. 149, Springer, Berlin, 1968.
- [14] H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie Bd. 1, Teubner,
Berlin, 1937.

Lebenslauf

In-ho Cho geboren am 17. Juli 1935 in Seoul (Korea)
Eltern: Kaufmann Jae-hi Cho und Bong-nyo geb. Choi.
Seit 1966 verheiratet mit Jung-ok geb. Whang

1942-1948 Volksschulbesuch in Seoul
1948-1950 Middleschoolbesuch in Seoul
1950-1954 Unterbrechung des Schulbesuch wegen des Koreakrieges
1954-1957 Sung-Book Highschool in Seoul;
Abschlussprüfung März 1957

1957-1959) Studium am Department of Mathematics der Korea
1960-1963) University: Aufnahmeprüfung April 1957,
Abschlussprüfung Februar 1963,
Grad: Bachelor of Science

1959-1960 Wehrdienst
1963-1965 Studium der Mathematik an der Graduate School
der Korea University: Aufnahmeprüfung März 1963,
Abschlussprüfung Februar 1965,
Grad: Master of Science

1.3.1966-
31.8.1966)
1.9.1968-) Lecturer an der Korea University
3.12.1969)
Seit 1.10. Studium der Mathematik an der Universität
1970 München

1.2.1974-
30.6.1974)
Seit 1.8.) Wissenschaftliche Hilfskraft mit den Bezügen
1974 eines Verwalters am mathematischen Institut
der Universität München.

